МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Т.В. Крюкова

МАТЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельной работы
студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»
очной формы обучения

Рубцовск 2015

УДК 517.9

Крюкова Т.В. Математика: Методические указания для самостоятельной работы студентов специальности «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» очной формы обучения / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2015. - 75 с.

Предлагаемая методическая разработка содержит теоретический материал по разделам математики: «Пределы», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл». В работе приведено большое количество примеров, которые являются образцами решения задач по данному разделу, так же прилагаются варианты контрольных работ. Рекомендовано студентам экономических направлений очной формы обучения.

Рассмотрены и одобрены на
заседании кафедры ВМФиХ
Рубцовского индустриального
института
Протокол № 4 от 10.12.2015г.

Рецензент: к.т.н., доцент А.В. Шашок

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ………………………………………………………… 4
2. ПРОИЗВОДНАЯ…………………………………………………………... 10
2.1. Задача о касательной………………………………………………… 10
2.2. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции……………………………………… 11
2.3. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования……………………………………………………………….. 13
2.4. Логарифмическое дифференцирование…………………………….. 18
2.5. Производные неявной функции……………………………………... 20
2.6. Производные функции, заданной параметрически…………………… 23
2.7. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике……………………………………………………. 24
3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ…………………………………… 29
3.1. Основные понятия…………………………………………………….. 29
3.2. Основные методы интегрирования…………………………………... 31
3.3. Интегрирование рациональных функций…………………………… 34
3.4. Интегрирование тригонометрических функций……………………. 41
3.5. Интегрирование иррациональных функций………………………… 44
4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ……………………………………….. 47
5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ……………………………………. 51
6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ…………………….. 53

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Операции над пределами функции

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (разности) их пределов, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall \alpha \in R; \ \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha A.$$

Пределы функций и неравенства

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leq f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1, \qquad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда: $A_1 \leq A_2$.

Теорема (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ также существует и равен *A*.

Теорема (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой этой точки x_0) положительны.

Теорема (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a;\ +\infty)$.

Число *A* называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $M>0$, что для всех значений $x>M$ выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x\to-\infty$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Односторонние пределы

Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0, т.е. на некотором интервале $(x_0,\ x_0+\beta)$, где $\beta>0$. Тогда говорят, что число *A* называется *пределом функции* $f(x)$ *справа* в точке x_0 (или *правосторонним пределом*), если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для всех *x* таких, что $x_0<x<x_0+\delta$, выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Аналогично определяется *предел функции слева* (или *левосторонний предел*) в точке x_0, обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, причем все три числа равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ (e\approx 2{,}72\ \ldots).$$

Логарифмы по основанию e называются натуральными логарифмами и обозначаются $\ln x$.

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha,\qquad \alpha\in R;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

Бесконечно малые функции

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

Таким образом,

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to x_0$.

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то $\beta(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$.

Тогда:

1) $\alpha(x)\pm\beta(x)=\gamma(x)$ также является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$;

2) $\alpha(x)\cdot\varphi(x)$ - бесконечно малая функция, если $\varphi(x)$ - ограниченная функция в окрестности точки x_0.

Сравнения бесконечно малых функций

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $x\to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ - *о малое* от $\beta(x)$ при $x\to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$, то $\alpha(x)=o(1)$, $x\to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad tgx\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad arctgx\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\qquad a^x-1\sim x\ln a \text{ (в частности, } e^x-1\sim x\text{)},$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, $x\to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)=\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

Пример 1. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение: а) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=2 приводит к неопределенности вида 0/0, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (x-2). Так как аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним, то множитель (x-2) отличен от нуля при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(3x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{3x+1}=\frac{5}{7}.$$

б) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=1 приводит к неопределенности вида 0/0, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (x-1). Так как аргумент x только стремится к своему предельному значению 1, но не совпадает с ним, то множитель (x-1) отличен от нуля при $x \to 1$:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 \quad + x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x^2 \qquad\quad} & x^2 + x + 2 \\ -x^2 + x - 2 & \\ \underline{x^2 - x \quad\;\;} & \\ -2x - 2 & \\ \underline{2x - 2} & \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} -x^3 \quad - x^2 - x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2 + x + 2 \\ -\mathrm{x} + 1 & \\ \underline{-\mathrm{x} + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2 + x + 2\right)}{(x-1)\left(x^2 - 1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \frac{4}{0} = \infty .$$

в) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=0 приводит к неопределенности вида $0/0$, чтобы раскрыть эту неопределенность, домножим числитель и знаменатель на сопряженные выражения для числителя и знаменателя (чтобы применить формулу $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$).

Тогда $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1^2\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2 - 4^2\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{0^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{0^2+1}+1\right)} = \frac{8}{2} = 4 .$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Использовали первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Искомый предел можно найти иначе. Известно, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых величин можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, так, при $x\to 0$ $\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

д) при $x\to\infty$ основание степени $\frac{3x-1}{3x+4}$ стремится к 1, а показатель степени $2x+1$ стремится к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида 1^∞. Представим основание в виде суммы 1 и некоторой бесконечно малой величины:

$$\frac{3x-1}{3x+4}=\frac{3x+4-5}{3x+4}=1+\frac{-5}{3x+4}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{2x+1}.$$

Положим $3x+4=-5y$, при $x\to\infty$ переменная $y\to-\infty$. Выразим показатель степени через новую переменную y. Так как $3x=-5y-4$, то $2x+1=-\frac{10}{3}y-7$. Таким образом,

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{-5}{-5y}\right)^{-\frac{10}{3}y-7}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{10}{3}y-7}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-\frac{10}{3}}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-7}=$$

$$=e^{-\frac{10}{3}}\cdot 1^{-7}=e^{-\frac{10}{3}}.$$

(Используем второй замечательный предел).

Другой способ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-5}\cdot\frac{-5}{3x+4}\cdot(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-10x-5}{3x+4}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x\cdot\left(-10-\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{4}{x}\right)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-10-\frac{5}{x}}{3+\frac{4}{x}}}=e^{\frac{-10-\frac{5}{\infty}}{3+\frac{4}{\infty}}}=e^{\frac{-10-0}{3+0}}=e^{-\frac{10}{3}}.$$

е) При $x\to 2$ основание $(3x-5)$ стремится к единице, а показатель степени $\frac{4}{x-2}$ стремится к бесконечности.

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+(3x-5-1)\right)^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+(3x-6)\right)^{\frac{1}{3x-6}\cdot\frac{3x-6}{1}\cdot\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{3(x-2)\cdot 4}{x-2}}=e^{12}.$$

ж) При подстановке предельного значения $x=\infty$ приходим к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, т.к. четвертая степень является самой большой степенью дроби.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^4}+\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0.$$

2. ПРОИЗВОДНАЯ

2.1. Задача о касательной

Пусть на плоскости *Oxy* дана непрерывная кривая $y=f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0,\,y_0)$ (рис. 2.1).

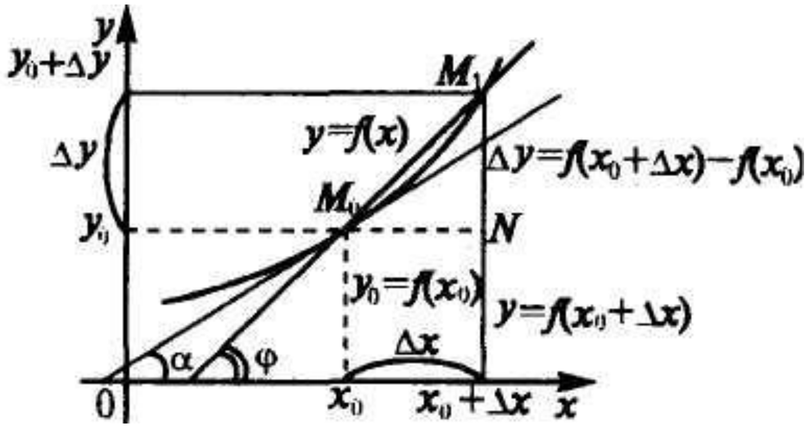

Рис. 2.1

Прежде всего необходимо выяснить, что мы будем понимать под касательной и кривой. Касательную нельзя определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. В самом деле, прямая (1) на рис. 2.2,а имеет одну общую точку с кривой (2), но не является касательной к ней. А прямая (3) на рис. 2.2,б, хотя имеет две общие точки с кривой (4), очевидно, касается ее в точке *A*. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.

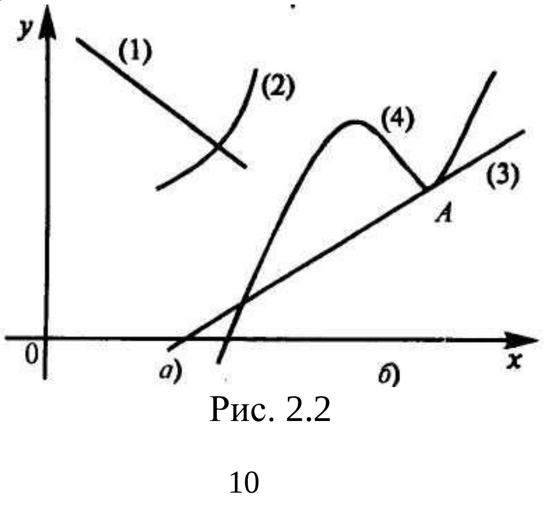

Рис. 2.2

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0; f(x_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$, проведем секущую M_0M_1 (см. рис. 2.1).

Под *касательной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* M_0 естественно понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0:

$$y - f(x_o) = k(x - x_o), \text{где } k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2.2.Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке *X*. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. ***Производной функции*** $y = f(x)$ *называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой*** *в этой точке.* Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка *X*, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке.*

Теперь вернемся к рассмотренным выше задачам.

Из задачи о касательной вытекает ***геометрический смысл производной****: производная* $f'(x_0)$ *есть* ***угловой коэффициент*** *(тангенс угла наклона)* ***касательной,*** *проведенной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* x_0, т.е. $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ *в* точке x_0 примет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 2. График функции $y = f(x)$ есть полуокружность (рис. 2.3). Используя геометрический смысл производной, найти значения производной $f'(x)$ в точках *A, B, C, D, E,* делящих полуокружность на четыре равные части.

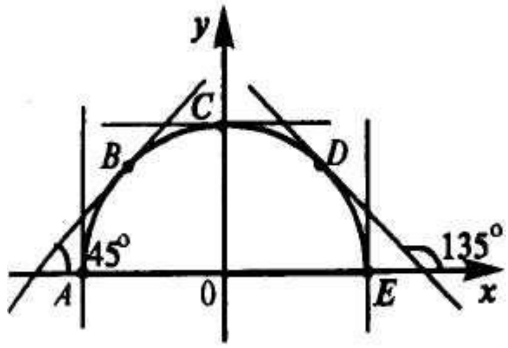

Рис. 2.3

Решение. В точках *B* и *D* углы наклона касательных к графику составляют соответственно 45° и 135°, поэтому $y'_B = tg45^0 = 1$, $y'_D = tg135^0 = -1$.

В точке *C* касательная параллельна оси *Ox*(α=0), поэтому $y'_C = tg0 = 0$. В точках *A* и *E* касательные перпендикулярны к оси *Ox*, $\alpha = 90^0$, tg90° — не существует, т.е. функция $f(x)$ не дифференцируема в этих точках, точнее — производная в этих точках бесконечна: $f'_A = +\infty$, $f'_E = -\infty$ (знаки, стоящие перед символами бесконечности, определяются тем, что в окрестности точки *A* производная $f'(x)$ положительна (острый угол наклона касательных), а в окрестности точки *E* — отрицательна (тупой угол наклона).

Пример 3. Доказать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке *x*=0.

Решение. Производная функция (если она существует) равна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$.

Очевидно, что при *x*=0 производная не существует, так как отношение $\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ равно 1 при $\Delta x > 0$ и —1 при $\Delta x < 0$, т.е. не имеет предела при $\Delta x \to 0$ (ни конечного, ни бесконечного). Геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке *x*=0.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке *x*=0, ибо $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ (рис. 2.4) и не дифференцируема в этой точке.

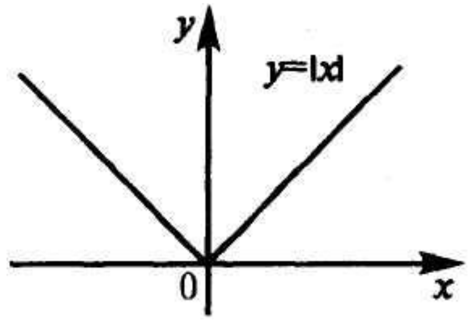

Рис. 2.4

Таким образом, *непрерывность функции — необходимое, но недостаточное условие дифференцируемости функции.*

В математике известны непрерывные функции, не дифференцируемые ни в одной точке.

Замечание. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке *X*, то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная функция допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция на данном промежутке называется *кусочно гладкой.*

2.3.Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по следующей схеме:

1°. Дадим аргументу *x* приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2°. Находим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3°. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

4°. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если этот предел существует).

Пример 4. Найти производную функции $y = x^3$.

Решение.

1°. Дадим аргументу *x* приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$.

2°. Находим приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right)$.

3°. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$.

4°. Находим предел $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент «*x*» заменен на промежуточный аргумент «*u*».

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности , $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности , $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
8. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
9. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(arctg \cdot u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
13. $(arcctg \cdot u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
14. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
15. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.
16. $(x)' = 1$.

Пример 5. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4x^5}$,

б) $y = x^2 \cos x$,

в) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$,

г) $y=\dfrac{\cos x\cdot ctgx}{1+2tgx}$.

Решение.

а) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию

$$y=x^{\frac{1}{2}}+5\cdot x^{\frac{-2}{3}}-x^{-1}+\frac{1}{4}\cdot x^{-5}.$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot x^{+\frac{1}{2}-1}+5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}-(-1)x^{-1-1}+\frac{1}{4}\cdot(-5)\cdot x^{-5-1}=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{5}{3}}+x^{-2}-\frac{5}{4}x^{-6}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{4\cdot x^6}.$$

б) $y'=\left(x^2\right)'\cos x+x^2\left(\cos x\right)'=2x\cdot\cos x+x^2\left(-\sin x\right)=2x\cdot\cos x-x^2\sin x.$

в) $$y'=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

г) $$y'=\left(\frac{\cos x\cdot ctgx}{1+2tgx}\right)'=\frac{\left(\cos x\cdot ctgx\right)'\cdot(1+2tgx)-\cos x\cdot ctgx\left(1+2tgx\right)'}{\left(1+2tgx\right)^2}=$$

$$=\frac{\left((\cos x)'\cdot ctgx+\cos x\left(ctgx\right)'\right)\cdot(1+2tgx)-\cos x\cdot ctgx\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(1+2tgx\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-\sin\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+2tgx)-\dfrac{2}{\sin x}}{\left(1+2tgx\right)^2}=\frac{\left(-\cos x-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+2tgx)-\dfrac{2}{\sin x}}{\left(1+2tgx\right)^2}.$$

Пример 6. Найти производную следующих сложных функций:

а) $y=\left(3x^2+2x\right)^4$;

б) $y=\sin 3x$;

в) $y=\cos^2 x$;

г) $y=tg^3\left(4x+1\right)$.

Решение.

а) Полагая $y=u^4$, где $u=3x^2+2x$, применим правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{du}=4u^3;\quad \frac{du}{dx}=6x+2;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot(6x+2)=4\left(3x^2+2x\right)^3(6x+2).$$

б) $y=\sin 3x.$ Полагая $u=3x$ и пользуясь формулами, получим

$$y'=(\sin 3x)'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'=\cos 3x\cdot 3.$$

в) Полагая $u=\cos x$, имеем

$$y'=\left(\cos^2 x\right)'=\left(u^2\right)'=2u\cdot u'=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x.$$

г) $y=tg^3(4x+1).$ Полагая $u=tg(4x+1)$, имеем

$$y'=\left(tg^3(4x+1)\right)'=\left(u^3\right)'=3u^2\cdot u'=3tg^2(4x+1)\cdot\left(tg(4x+1)\right)'.$$

Найдем $\left(tg(4x+1)\right)'$, полагая $u=4x+1$, имеем

$$\left(tg(4x+1)\right)'=(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'=\frac{1}{\cos^2(4x+1)}\cdot 4,$$

тогда

$$y'=3tg^2(4x+1)\cdot\frac{1}{\cos^2(4x+1)}\cdot 4=\frac{12tg^2(4x+1)}{\cos^2(4x+1)}.$$

Пример 7. Найти производную следующих функций:

а) $y=x^5\cdot 4^x$.

б) $f(x)=\sqrt[x]{3}+\frac{1}{2^{5x}}+6^{\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

в) $y=\ln\sin 2x.$

г) $y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$.

д) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}$; вычислить $f'(0)$.

Решение.

а) Дифференцируем как произведение

$$y'=\left(x^5\cdot 4^x\right)'=\left(x^5\right)'\cdot 4^x+x^5\left(4^x\right)'=5x^4\cdot 4^x+x^5\cdot 4^x\cdot\ln 4=x^4\cdot 4^x(5+x\cdot\ln 4).$$

б) Вводим дробные и отрицательные показатели, затем дифференцируем как сумму

$$f'(x)=\left(3^{\frac{1}{x}}+2^{-5x}+6^{x^{\frac{1}{2}}}\right)'=3^{\frac{1}{x}}\ln 3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+2^{-5x}\ln 2(-5x)'+6^{x^{\frac{1}{2}}}\ln 6\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=-\frac{3^{\frac{1}{x}}\ln 3}{x^2}-5\cdot 2^{-5x}\ln 2+\frac{6^{x^{\frac{1}{2}}}\ln 6}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(1)=-\frac{3\ln 3}{1^2}-5\cdot 2^{-5}\ln 2+\frac{6^1\ln 6}{2}=-3\ln 3-\frac{5}{32}.\ln 2+3\ln 6=$$

$$=-3\ln 3-\frac{5}{32}\cdot\ln 2+3\ln 3\cdot 2=--3\ln 3-\frac{5}{32}\cdot\ln 2+3\ln 3+3\ln 2=$$

$$=-\frac{5}{32}\cdot\ln 2+3\ln 2=\ln 2\left(-\frac{5}{32}+3\right)=\ln 2\frac{-5+96}{32}=\frac{91}{32}\ln 2.$$

в) $y'=\left(\ln\sin 2x\right)'=\dfrac{1}{\sin 2x}\cdot\left(\sin 2x\right)'=\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}=2ctg2x.$

г) Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя.

$$y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\ln\left(a-x^2\right)-\ln\left(a+x^2\right).$$

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}=\frac{-2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{-2x\left(a^2+x^2+a^2-x^2\right)}{a^4-x^4}=$$

$$=\frac{-2x\cdot 2a^2}{a^4-x^4}=-\frac{4a^2x}{a^4-x^4}.$$

д) Преобразуем функцию

$$y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}=\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln e^{3x}-\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x\underbrace{\ln e}_{1}-\ln\left(1+e^{3x}\right)\right).$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3x-\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)'=\frac{1}{2}\left(3-\frac{\left(1+e^{3x}\right)'}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot\left(1+e^{3x}\right)-3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+3e^{3x}-3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1+e^{3x}};$$

$$y'\left(0\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1+e^0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

Пример 8.. Найти производную следующих функций:

а) $y=3\arcsin\left(4x+1\right)-\arccos\left(4x+1\right);$

б) $y=2arctg^3x;$

в) $y=arcctg\left(\sin x\right).$

Решение.

а) $y'=\left(3\arcsin\left(4x+1\right)-\arccos\left(4x+1\right)\right)'=3\left(\arcsin\left(4x+1\right)\right)'-$

$$-\left(\arccos\left(4x+1\right)\right)' = 3\cdot\frac{\left(4x+1\right)'}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}} - \left(-\frac{\left(4x+1\right)'}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}}\right) =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}} + \frac{4}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}} = \frac{16}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}}.$$

б)

$$y' = \left(2arctg^3x\right)' = 2\cdot 3arctg^2x\cdot\left(arctgx\right)' = \frac{6arctg^2x}{1+x^2}.$$

в) $y' = \left(arcctg\left(\sin x\right)\right)' = -\frac{\left(\sin x\right)'}{1+\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$

2.4. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти *y'* из уравнения $y=f(x)$, то можно:

1) логарифмировать обе части уравнения (по основанию *e*): $\ln y = \ln f(x) = \phi(x);$

2) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от *x*: $\frac{y'}{y} = \phi'(x);$

3) заменить *y* выражением через *x* и определить *y'*: $y' = y\cdot\phi'(x) = f(x)\cdot\phi'(x).$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y = u^v$, где *u*, *v* – функции от *x*.

Пример 9. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^{\left(x^2+1\right)}$;

б) $y = \left(\cos x\right)^{\sin 2x}$;

в) $y = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

г) $y = \left(x+2\right)\cdot\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2\left(x+4\right)}.$

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, находим:

а) $y = x^{\left(x^2+1\right)}.$

1) $\ln y = \ln x^{\left(x^2+1\right)}$;

$\ln y = \left(x^2+1\right)\cdot\ln x$;

2) $\frac{y'}{y}=\left(x^2+1\right)'\cdot\ln x+\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x}=2\ln x+\frac{x^2+1}{x}$;

3) $y'=y\left(2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}\right)=x^{\left(x^2+1\right)}\left(2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}\right)$.

б) $y=\left(\cos x\right)^{\sin 2x}$.

1) $\ln y=\ln\left(\cos x\right)^{\sin 2x}$:

$\ln y=\sin 2x\cdot\ln\left(\cos x\right)$.

2) $\frac{y'}{y}=\left(\sin 2x\right)'\cdot\ln\left(\cos x\right)+\sin 2x\cdot\frac{\left(\cos x\right)'}{\cos x}=$

$=2\cos 2x\cdot\ln\left(\cos x\right)-\frac{\sin 2x\cdot\sin x}{\cos x}$.

3) $y'=y\cdot\left(2\cos 2x\cdot\ln\left(\cos x\right)-\frac{2\sin^2 x\cdot\cos x}{\cos x}\right)=\left(\cos x\right)^{\sin 2x}\times$

$\times\left(2\cos 2x\cdot\ln\left(\cos x\right)-2\sin^2 x\right)$.

в) $y=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

1) $\ln y=\ln\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

$\ln y=\ln\left(2x^2\right)-\ln\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\ln y=\ln\left(2x^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^3\right)$.

2) $\frac{y'}{y}=\frac{\left(2x^2\right)'}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+x^3\right)'}{1+x^3}=\frac{4x}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{1+x^3}=\frac{2}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^3}$.

3) $y'=y\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^3}\right)=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^3}\right)$.

г) $y=\left(x+2\right)\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2\left(x+4\right)}$.

1) $\ln y=\ln\left(\left(x+2\right)\cdot\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}\cdot\sqrt[3]{x+4}\right)$.

$\ln y=\ln\left(x+2\right)+\ln\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}+\ln\sqrt[3]{x+4}$.

$\ln y=\ln\left(x+2\right)+\frac{2}{3}\ln\left(x+1\right)+\frac{1}{3}\ln\left(x+4\right)$.

2) $\frac{y'}{y}=\frac{\left(x+2\right)'}{x+2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(x-1\right)'}{x-1}+\frac{1}{3}\frac{\left(x+4\right)'}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+4}$.

3) $y' = y\left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+4)}\right) = \left((x+2)\sqrt[3]{(x-1)^2(x+4)}\right)\times$

$\times\left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+4)}\right).$

2.5. Производные неявной функции

Если *y* есть неявная функция от *x*, т.е. задана уравнением *f*(*x*,*y*)=0, неразрешенным относительно *y*, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по *x* обе части неравенства, помня, что *y* есть функция от *x*, и затем разрешить полученное равенство относительно производной. Как правило, она будет зависеть от *x* и *y*; $\frac{dy}{dx} = \phi(x, y).$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\phi(x,y)}{dx} = F\left(x,\ y,\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right).$$

Заменяя $\frac{dy}{dx}$ через $\phi(x, y)$, получим выражение второй производной через *x* и *y:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left[x, y, \phi(\mathrm{x,y})\right] = \psi(x, y).$$

Точно так же и все высшие производные от неявной функции можно выразить через *x* и *y*: каждый раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, ее следует заменять через $\phi(x, y)$.

Пример 10. Для данных неявных функций найти производные указанного порядка.

а) $e^{x-2} + yx - 3y - 2 = 0;\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} - ?$

б) $x^y = y^x\ \frac{dx}{dy} - ?$

в) $t - s + arctgx = 0 \quad s'' - ?$

Решение.

а) Дифференцируя по *x* и считая *y* функцией от *x*, найдем

$$e^{x-2}+y'\cdot x+y\cdot x'-3y'=0$$

$$e^{x-2}+y'\cdot x+y-3y'=0$$

$$y'\cdot x+(-3y')=-y-e^{x-2}$$

$$y'\left(x-3\right)=-y-e^{x-2}$$

$$y'=\frac{y+e^{x-2}}{3-x}.$$

Подставляя данное по условию значение x=2 в полученное уравнение, получим:

$y'_{x=2}=\dfrac{y_{x=2}+e^{0}}{3-2}$, остается найти $y_{x=2}$. Для этого воспользуемся исходным уравнением

$$e^{0}+y\cdot 2-3y-2=0$$

$$-y+1-2=0$$

$$-y-1=0$$

$$-y=1,\quad y=-1.$$

y=-1, тогда $y'_{x=2}=\dfrac{-1+1}{1}=0.$

б) Логарифмируем обе части уравнения, затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию от y:

$$\ln x^{y}=\ln y^{x}$$

$$y\cdot\ln x=x\cdot\ln y$$

$$y'\ln x+y\cdot\left(\ln x\right)'=x'\cdot\ln y+x\cdot\left(\ln y\right)'$$

$$\ln x+y\cdot\frac{x'}{x}=x'\cdot\ln y+x\cdot\frac{1}{y}.$$

Выразим x':

$$y\cdot\frac{x'}{x}-x'\cdot\ln y=\frac{x}{y}-\ln x$$

$$x'\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)=\frac{x}{y}-\ln x$$

$$x'=\left(\frac{x}{y}-\ln x\right):\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)$$

$$x'=\frac{x-y\ln x}{y}:\frac{y-x\ln y}{x}$$

$$x'=\frac{x-y\ln x}{y}:\frac{x}{y-x\ln y}$$

$$x'=\frac{x\left(x-y\ln x\right)}{y\left(y-x\ln y\right)}.$$

в) Дифференцируем уравнение по t, считая s функцией от t:

$$t'-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0$$

$$1-s'+\frac{s'}{1+s^2}=0$$

$$\frac{s'}{1+s^2}-s'=-1$$

$$s'\left(\frac{1}{1+s^2}-1\right)=-1,$$

$$s'\left(\frac{1-1-s^2}{1+s^2}\right)=-1,$$

$$s'\left(\frac{-s^2}{1+s^2}\right)=-1,$$

$$s'=\frac{-1}{\left(\frac{-s^2}{1+s^2}\right)},\quad s'=\frac{1+s^2}{s^2},\quad s'=\frac{1}{s^2}+1,$$

$$s'=s^{-2}+1.$$

Последнее равенство снова дифференцируем по t и находим s'':

$$s''=\left(s^{-2}\right)+0$$

$$s''=-2s^{-3}\cdot s'.$$

Заменяем s' на $s^{-2}+1$, получим:

$$s''=-2s^{-3}\left(s^{-2}+1\right)$$

$$s''=-2s^{-5}-2s^{-3}$$

$$s''=-\frac{2}{s^5}-\frac{2}{s^3}$$

$$s''=\frac{-2\left(s^2+1\right)}{s^5}.$$

2.6. Производные функции, заданной параметрически

Если функция y от независимой переменной x задана через посредство вспомогательной переменной (параметра t):

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \phi(t) \end{cases},$$

то производные y по x определяются по формулам:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Все эти формулы составлены по одному общему правилу: производная от параметрически заданной величины y по независимо переменной x равна отношению производных от y и от x, взятых по параметру t.

Пример 11. Для следующих функций, заданных параметрически, найти указанные производные:

а) $\begin{cases} x = 2\sin t + \sin 2t, \\ y = 3\cos t + \cos 3t. \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} - ?$

б) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1.) \end{cases}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} - ?$

в) $\begin{cases} x = 1 + e^{\alpha\phi}, \\ y = a\phi + e^{-\alpha\phi}. \end{cases}$ $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3} - ?$

Решение.

а) Находим производные y и x по t:

$$\frac{dy}{dt} = 3(-\sin t) - 3\sin 3t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t + 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{2\cos t + 2\cos 2t} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + 2\cos 2t}.$$

б) Находим производные y и x по t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 2; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{t+1}}{2t+2} = \frac{1}{2(t+1)(t+1)} = \frac{1}{2(t+1)^2} = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}.$$

Далее находим производную от y' по t, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по t:

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{1}{2}(-2)(t+1)^{-3}(t+1)'; \quad \frac{dy'}{dt}=-(t+1)^{-3}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{(t+1)^{-3}}{2(t+1)}=-\frac{1}{2(t+1)^4}.$$

в) $$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{a-e^{-\alpha\phi}a}{ae^{\alpha\phi}}=\frac{1\text{-}e^{\alpha\phi}}{e^{\alpha\phi}}=e^{-\alpha\phi}\text{-}e^{-2\alpha\phi},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{\text{-a}e^{-\alpha\phi}+2ae^{-2\alpha\phi}}{ae^{\alpha\phi}}=\text{-}e^{-2\alpha\phi}+2e^{-3\alpha\phi},$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{\frac{dy''}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{2ae^{-2\alpha\phi}-6e^{-3\alpha\phi}}{ae^{\alpha\phi}}=2e^{-3\alpha\phi}-6e^{-4\alpha\phi}.$$

2.7. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике

Рассмотрим еще понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной.*

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx — прирост продукции, тогда Δy — приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** *производства и характеризует приближенно дополнительны затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов на основе анализа этих предельных величин получило название *предельного анализа.* Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарную или среднюю величины), а *процесс, изменение экономического объекта.* Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.* Следует учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). Вместе с тем в ряде случаев можно отвлечься от дискретности показателей и эффективно использовать предельные величины.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним и предельным доходом**[1] в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на | количество продукции q, т.е. $r = pq$.

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно, цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса $p(q)$ — есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a < 0$, $b > 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq+b)q = aq^2 + bq$ (рис. 2.5). В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{ср} = \frac{r}{q} = aq + b$, а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит $r_q^{'} = 2aq + b$ Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с меньшей скоростью) среднего дохода.*

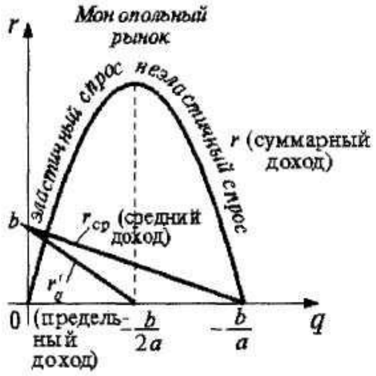

Рис. 2.5

В условиях с о в е р ш е н н о й   к о н к у р е н ц и и , когда число участников рынка велико и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p=b$. При этом суммарный доход составит $r = pq$ и, соответственно, средний доход $r_{cp} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r_q' = b$ (рис. 2.6).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка* в отличие от монопольного *средний и предельный доходы совпадают*.

Рис. 2.6

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие **эластичности функции.**

Определение. ***Эластичностью функции*** *$E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Выясним геометрический смысл эластичности функции. По определению

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y' = \frac{x}{y} tg\alpha,$$

где $tg\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x, y)$ (рис. 2.7). учитывая, что из треугольника MBN $MN = x\ tg\alpha$, $MC=y$, а из подобия треугольников MBN и AMC $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$, получим $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек ее пересечения с осями Ox* и *Oy*. Если точки пересечения касательной к графику функции A и B находятся по одну сторону от точки M, то эластичность $E_x(y)$ положительна (см. рис. 2.7), если по разные стороны, то $E_x(y)$ отрицательна (рис. 2.8).

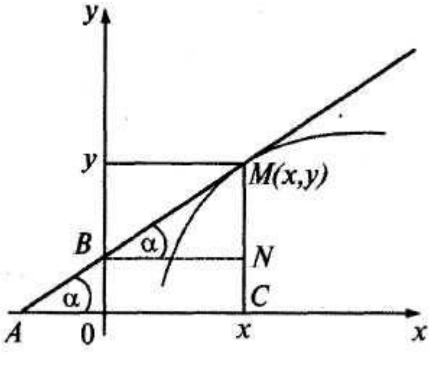

Рис. 2.7

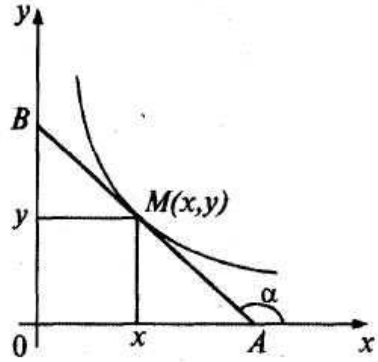

Рис. 2.8

Отметим свойства эластичности функции.

1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y)=xT_y.$$

2. *Эластичность произведения (частного)* двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v),$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3. *Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса *y* относительно цены *x* (или дохода *x*) — коэффициент, показывающий приближенно, на сколько процентов изменится спрос (объем потребления) при изменении цены (или дохода) на 1%.

Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным,* если $|E_x(y)| < 1$ — *неэластичным* относительно цены (или дохода). Если $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью.*

Выясним, например, как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход $r = pq$ при реализации продукции. Выше мы предполагали, что кривая спроса *p = p(q)* — линейная функция; теперь будем полагать, что *p=p(q)* — произвольная функция. Найдем предельный доход

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p\left(1 + E_q(p)\right).$$

Учитывая, что) для эластичности взаимно обратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно спроса, т.е. $E_q(p)=\dfrac{1}{E_p(q)}$, а также то, что $E_p(q)<0$, получим при произвольной кривой спроса

$$p_q^{'}=p\left(1-\frac{1}{\left|E_p(q)\right|}\right).$$

Если спрос неэластичен, т.е. $\left|E_p(q)\right|<1$, то предельный доход $r_q^{'}$ отрицателен при любой цене; если спрос эластичен, т.е. $\left|E_p(q)\right|>1$, то предельный доход $r_q^{'}$ положителен. Таким образом, для неэластичного спроса изменения цены и предельного дохода происходят в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных. Это означает, что *с возрастанием цены для продукции эластичной спроса суммарный доход от реализации продукции увеличивается, а для товаров неэластичного спроса — уменьшается.*

Пример 12. Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией y = 50x — 0,05 x^3 (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Решение. Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением $y_{ср}=\dfrac{y}{x}=50-0,05x^2$; при x = 10 средние издержки (на единицу продукции) равны $y_{ср}(10)=50-0,05\cdot10^2=45$ (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной $y'(x)$ = 50-0,15x^2; при x = 10 предельные издержки составят $y'(10)$ = 50-0,15-10^2 = 35 (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед.

Пример 13. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y=-0,5x+80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. Эластичность себестоимости

$$E_x(y)=\frac{-0,5x}{-0,5x+80}=\frac{x}{x-160}.$$

При x=60 $E_{x=60}(y)=-0,6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб, увеличение его на 1% привело к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 14. Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u=-\dfrac{5}{6}t^3+\dfrac{15}{2}t^2+100t+50$ (ед.), $1\le t\le 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда выражается производной

$$z(t)=u'(t)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t)=\left[\ln z(t)\right]'$:

$$z'(t)=-5t+15 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$T_z(t)=\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t-40} \text{ (ед./ч).}$$

В заданные моменты времени $t_1=1$ и $t_2=8-1=7$ соответственно имеем: $z(1)=112{,}5$ (ед./ч), $z'(1)=10$ (ед./ч^2), $T_z(1)=0{,}09$ (ед./ч) и $z(7)=82{,}5$ (ед./ч), $z'(7)=-20$ (ед./ч^2), $T_z(7)=-0{,}24$ (ед./ч).

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Основные понятия

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции *f(x)* найти ее производную (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию *F(x)*, зная ее производную *F′(x)=f(x)* (или дифференциал). Искомую функцию *F(x)* называют первообразной функции *f(x)*.

Функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x)* на интервале *(a; b)*, если для любого $x\in(a;b)$ выполняется равенство

F′(x)=f(x) (или *dF(x)=f(x)dx*).

Определение. Множество всех первообразных функций *F(x) + C* для *f(x)* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь *f(x)* называется подынтегральной функцией,

f(x)dx – подынтегральным выражением, *x* – переменной интегрирования, $\int$ - знаком неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых *y=F(x) + C* (каждому числовому значению *C* соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется интегральной кривой.

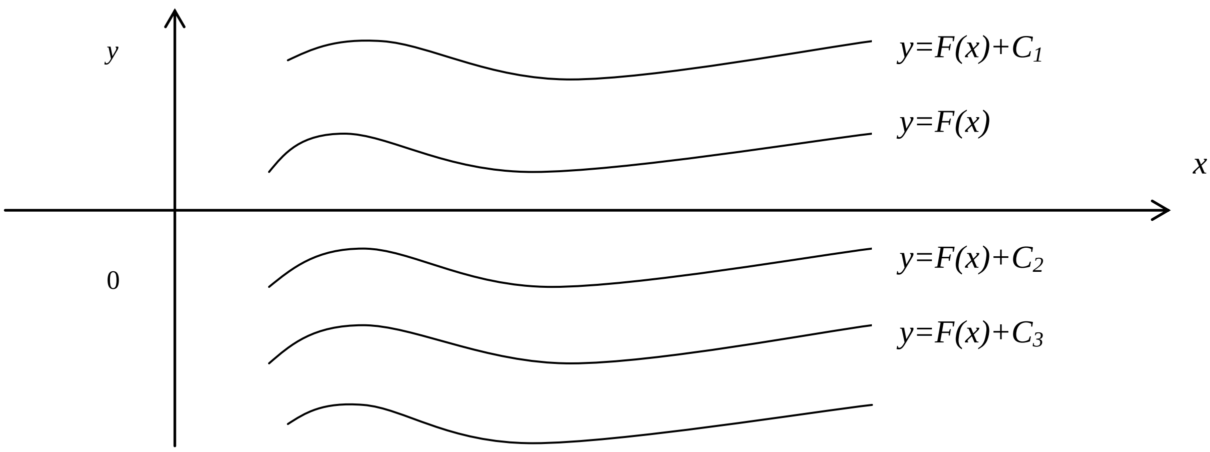

Рис. 3.1

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \qquad a\neq 0 \text{ – постоянная.}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то и } \int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \phi(x)$ - произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;

4. $\int e^u du = e^u + C$;

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$;

6. $\int \cos u \, du = \sin u + C$;

7. $\int tg\, u \, du = -\ln|\cos u| + C$;

8. $\int ctg\, u \, du = \ln|\sin u| + C$;

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C$;

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\,\frac{u}{2}\right| + C$;

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$;

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{u}{a} + C$;

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$;

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

3.2. Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Данный метод заключается в том, что искомый интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 15.

$$1.\int ctg^2 x dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-ctgx-x+C.$$

$$2.\int\frac{x^3+4x+2}{2x}dx\int\left(\frac{x^3}{2x}+\frac{4x}{2x}+\frac{2}{2x}\right)dx=\int\left(\frac{x^2}{2}+2+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int x^2dx+2\cdot\int dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+2x+\ln x+C.$$

$$3.\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctgx+tgx+C.$$

$$4.\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int(\ \frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})dx=$$

$$=\int\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\left(x^2-1\right)dx+arctgx=\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C.$$

Метод подстановки (замена переменной)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, при этом функции $\varphi'(x)$и $f(x)$ непрерывны на заданном интервале. Тогда этот интеграл можно упростить с помощью подстановки $t=\varphi(x)$, используя равенство

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt\,. \qquad (3.1)$$

Эта формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Пример 16. Найти интеграл, используя подходящую подстановку:

$$1.\int e^{\frac{x}{4}}dx=\begin{bmatrix}\frac{x}{4}=t\\ d(\frac{x}{4})=dt\\ \frac{dx}{4}=dt\\ dx=4dt\end{bmatrix}=\int e^t\cdot 4dt=4\cdot\int e^t dt=4e^t+C=4e^{\frac{x}{4}}+C.$$

$$2.\int x\cdot\sqrt{x^2-3}dx=\begin{bmatrix} x^2-3=t \\ d(x^2-3)=dt \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{bmatrix}=\int\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

$$3.\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{bmatrix} \arcsin x=t \\ d(\arcsin x)=dt \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt\end{bmatrix}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\arcsin^4 x}{4}+c.$$

Интегрирование по частям

Пусть производные функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда имеет место равенство

$\int uv'dx=uv-\int vu'dx$.

Эта формула называется формулой интегрирования по частям.

Поскольку $v'(x)dx=dv(x)$, $u'(x)dx=du(x)$, то формулу часто записывают в более компактном виде:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx, \int P(x)a^{kx}dx$, где P($x$) – многочлен, k – число, u=P(x) за dv – все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcctgxdx,$

$\int P(x)\ln xdx,\ P(x)dx=dv,$ за u – все остальные множители.

3. $\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx,\ u=e^{ax}$ или u=cosbx.

Пример17.

$$1.\int(2x+1)\cdot e^{3x}dx=\begin{bmatrix} u=2x+1, & dv=e^{3x}dx \\ du=2dx, & v=\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\dfrac{e^{3x}}{3}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{(2x+1)\cdot e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx=\frac{(2x+1)\cdot e^{3x}}{3}-\frac{2}{9}\cdot e^{3x}+C.$$

$$2.\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\int\frac{\sqrt{x}dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

$$3.\int x^2\cdot 3^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & dv = 3^x dx \\ du = 2xdx & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{bmatrix} = \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\int x\cdot 3^x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & dv = 3^x dx \\ du = dx, & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{bmatrix} = \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx\right) =$$

$$= \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2x\cdot 3^x}{\ln^2 3} + \frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3} + C.$$

$$4.\int arctgxdx = \begin{bmatrix} u = arctgx, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{bmatrix} = x\cdot arctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + x^2 = t \\ d(1+x^2) = dt \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\ln|t| =$$

$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

3.3. Интегрирование рациональных функций

Понятие о рациональных функциях

Формула вида

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$,

$n \in N$, a_n - постоянные коэффициенты, называется многочленом или целой рациональной функцией.

Теорема 1. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, где $x_1, x_2, ... x_n$ - корни многочлена, a_0 - коэффициент при x^n. Множители $x - x_i$ в разложении называются линейными.

Если в разложении какой-либо корень встретится k раз, то он называется корнем кратности k.

Теорема 2. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Например, $ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 3x^2 + 1$, тогда $a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 1.$

Теорема 3. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_r)^{k_r}(a^2 + p_1x + q_1)^{s_1}...(a^2 + p_mx + q_m)^{s_m}.$$

При этом $k_1 + k_2 + ...k_r + 2(s_1 + s_2 + ...s_m) = n,$ все квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Пример 18.

1. $x^4 - 1 = (x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)$.
2. $x^3 - 16x = x\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$.

Дробно-рациональная функция

Определение. Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е.

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m, $Q_n(x)$ - многочлен степени n.

Определение. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, m<n, в противном случае ($m \geq n$) дробь называется неправильной.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена L(x) и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т.е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$

Пример 19. Представить неправильную дробь $\frac{x^4 - 5x + 9}{x + 2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x + 9 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + 2x^3} & x^3 - 2x^2 + 4x - 13 \\
\quad -2x^3 - 5x + 9 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad\quad 4x^2 - 5x + 9 & \\
\qquad\quad \underline{4x^2 + 8x} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} -13x+9 \\ \underline{-13x-26} \\ 35 \end{array}$$

$$\frac{x^4-5x+9}{x+2}=x^3-2x^2+4x-13+\frac{35}{x+2}.$$

Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Правильные рациональные дроби вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{x-a}k$ $(k\geq 2)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(D<0)$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k\geq 2)$, (D<0),

где A, M, N, a, p, q – действительные числа, называют простейшими рациональными дробями I, II, III, IV типов.

Теорема 4. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_1}+...+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+...+\frac{M_{s_m}x+N_{s_n}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_m}},$$

(3.2)

где $A_1,...B_1,...,$ - действительные коэффициенты.

Пример 20.

1. $\dfrac{x^2+4}{(x-2)\cdot(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3}.$

2. $\dfrac{x^3+1}{x^2\cdot(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}.$

3. $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Fx+N}{(x^2+x+1)^2}.$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, ...$ в равенстве (3.2) можно применить метод сравнения коэффициентов. Метод заключается в следующем.

1. В правой части равенства (3.2) приведем дроби к общему знаменателю Q(x), в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$. S($x$) – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители - $P(x) \equiv S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 2), в обеих частях равенства получим систему линейных уравнений, из которой определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, ...$

Например. Представить дробь в виде простейших

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} = \frac{A\cdot(x^2-2x+5)+(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} = \frac{x^2\cdot(A+B)+x\cdot(-2A-B+C)+5A-C}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}.$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+C=-3; \\ 5A-C=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ -2A-B+C=-3; \\ C=5A+3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ -2A-2+A+5A+3=-3; \\ C=5A+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=2-A \\ 4A=-4 \quad ; \\ C=5A+3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=3 \\ A=-1. \\ C=-2 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = \begin{bmatrix} x-a=t \\ d(x-a)=dt \end{bmatrix} = \ln|x-a|+C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}dx=\int\frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx, \text{ причем } a^2-\frac{p^2}{4}>0.$$

Далее делаем подстановку $x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt.$

$$\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt=\int\frac{Mt-M\cdot\frac{p}{2}+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(N-M\cdot\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+(N-M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+$$

$$+(N-M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C==\frac{M}{2}\ln((x+\frac{p}{2})^2+a^2)+(N-M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Пример 21. $\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3x+1}{x^2+2x+1-1+10}dx=\int\frac{3x+1}{(x+1)^2+9}dx=$

$$=\begin{bmatrix}x+1=t\\ x=t-1\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt=\int\frac{3t-2}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}-2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right|-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+9\right|-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

IV. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ k\ge 2,\ q-\frac{p^2}{4}>0.$

Данный интеграл, подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$, сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k},\ a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Вычисляем первый интеграл

$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\begin{bmatrix}d(t^2+a^2)=2tdt\\ tdt=\dfrac{d(t^2+a^2)}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}+C_1.$$

Вычисляем второй интеграл

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$
$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям

$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}=\begin{bmatrix} u=t & dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k} \\ du=dt & v=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k}\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$
$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$
$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2(1-k)}J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого $k>$ 1.

$$J_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3},\ a=1,\ k=3.$$
$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+C.$$
$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{t}{2(t^2+1)}=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2(t^2+1)}+C.$$
$$J_3=\frac{3}{4}J_2+\frac{t}{4(t^2+1)^2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2(t^2+1)}\right)+\frac{t}{4(t^2+1)^2}+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Правило интегрирования рациональных дробей.

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби (разделить числитель на знаменатель).

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представим ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 22.

1. $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$

$$\begin{array}{r|l} x^5+2x^3+4x+4 & x^4+2x^3+2x^2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5+2x^4+2x^3} & x\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^4+4x+4 \\ - \ \underline{-2x^4-4x^3-4x^2} \\ 4x^3+4x^2+4x+4 \end{array}$$

$$=\int\left(x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$$

$$=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{Ax^3+2Ax^2+2Ax+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{x^3(A+C)+x^2(2A+B+D)+x(2A+2B)+2B}{x^2(x^2+2x+2)}.$$

Найдем коэффициенты А, В, С, Д из системы:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+D=4 \\ 2A+2B=4 \\ 2B=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} A+C=4 \\ 2A+2+D=4 \\ A+2=2 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=4 \\ D=2 \\ A=0 \\ D=2 \end{cases}$$

Возвращаемся в решение

$$=\frac{x^2}{2}+2x+2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+1+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx=\begin{bmatrix} x+1=t \\ x+t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4\left(t-1\right)+2}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4t-2}{t^2+1}dt=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+2\int\frac{2tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+2\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}-2arctgt=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\ln\left(t^2+1\right)-2arctgt+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\ln\left((x+1)^2+1\right)-2arctg(x+1)+C.$$

3.4. Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная подстановка

Функцию с переменными sin$x$ и cos$x$, над которыми выполняются рациональные действия сложение, вычитание, умножение, деление, принято обозначать R(cos$x$, sin$x$), где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\cos x, \sin x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$, которая называется универсальной.

Действительно,

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctgt;\ dx\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Этот способ весьма громоздкий, но всегда приводит к результату.

Пример23.

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2t+1+t^2}{1+t^2}} =$$

$$=\int\frac{2dt}{2t^2+2t+4}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=arctg\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}+C=arctg\frac{2(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}+C.$$

Если $\int R(\cos^{2n}x;\sin^{2m}x)dx$, т. е. функции синуса и косинуса входят в интеграл в четных степенях, то применяют подстановку $tgx=t$, тогда

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{1}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{1}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2};$$

$$x=arctgt,dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int R(\cos^{2n}x;\sin^{2m}x)dx=\int R(\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n;\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^m)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 24.

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\begin{bmatrix} tgx=t \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}tgx+C.$$

Интегралы типа $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx.$

Для нахождения интеграла применяют следующие приемы:

a) если m - целое положительное нечетное число, а n- любое число, то $\sin^m x=\sin^{m-1}x\cdot\sin x$ и $\cos x=t, d(\cos x)=-dt;$

b) если n - целое положительное нечетное число, а m - любое число, то $\cos^n x=\cos^{n-1}x\cdot\cos x$ и $\sin x=t, d(\sin x)=dt;$

c) если n и m - целые положительные четные числа, то применяют формулы понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}; \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2};$

d) если $m+n$ четное отрицательное целое число, то применяется подстановка $tgx = t$.

Пример 25.

1. $$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx =$$
$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^4 \cdot \left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^4 \cdot \left(1-2t+t^2\right) dt =$$
$$= \int (t^4 - 2t^5 + t^6) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

2. $$\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx = \int \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 6x\right) \cdot \left(1+\cos 6x\right) \cdot \left(1-\cos 6x\right) dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 6x\right) \cdot \left(1-\cos 6x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \left(1-\cos 6x\right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 6x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \cos 6x dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2}\right) dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \frac{d\left(\sin 6x\right)}{6} = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 12x}{12}\right) - \frac{1}{48}\frac{\sin^3 6x}{3} + C.$$

3. $$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tgx| + C.$$

Интегралы типа $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx; \int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx; \int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$ вычисляются с помощью формул тригонометрии

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha x - \beta x\right) + \sin\left(\alpha x + \beta x\right)\right);$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha x - \beta x\right) + \cos\left(\alpha x + \beta x\right)\right);$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha x - \beta x\right) - \cos\left(\alpha x + \beta x\right)\right).$$

Пример 26.

$$\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 3x + \sin 7x\right) dx = \frac{1}{6}\int \sin 3x d(3x) + \frac{1}{14}\int \sin 7x d(7x) =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

3.5. Интегрирование иррациональных функций

Квадратичные иррациональности

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx; \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$.

Пример 27.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} == \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right| + C.$$

$$2. \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{-\left(x^2+2x-6\right)}}dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{-\left(x^2+2x+1-1-6\right)}}dx =$$

$$= \int \frac{x+4}{\sqrt{-\left(\left(x+1\right)^2-7\right)}}dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{7-\left(x+1\right)^2}}dx \begin{bmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(7-t^2\right)}{\sqrt{7-t^2}} + 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(7-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(7-t^2\right) + 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{2}\frac{\left(7-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} +$$

$$+3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = -\sqrt{7-\left(x+1\right)^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, можно вычислить, пользуясь следующей формулой:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степени n-1 с неопределенными коэффициентами,

λ - также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства.

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(\ Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\ \right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 28. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \left(Ax+B\right)\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = A\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + \frac{\left(Ax+B\right)\cdot\left(-2-2x\right)}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{A\cdot\left(1-2x-x^2\right)+\left(Ax+B\right)\cdot\left(-1-x\right)+\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{A-2Ax-Ax^2-Ax-Ax^2-B-Bx+\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{-2Ax^2+x(-3A-B)+A-B+\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$\begin{cases}-2A=1\\-3A-B=0\\A-B+\lambda=0\end{cases}\quad\begin{cases}A=\frac{-1}{2}\\B=\frac{3}{2}\\\lambda=2\end{cases}$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \left(\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + 2\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} =$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + 2\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2x-1\right)}} = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1-2x-x^2} + 2\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2x+1-1-1\right)}} =$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x+1\right)^2-2\right)}}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+$$

$$+\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{2-\left(x+1\right)^2}}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

Интегралы типа $\int\frac{Mx+N}{\left(x-\alpha\right)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ находят, используя подстановку $x-\alpha=\frac{1}{t};\ x=\frac{1}{t}+\alpha;\ dx=-\frac{dt}{t^2}.$

Пример 29.

$$\int\frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+1+1}}=\int\frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}}=$$

$$=\begin{bmatrix} x+1=\frac{1}{t} \\ dx=\frac{-dt}{t^2}\end{bmatrix}=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=-\int\frac{\frac{dt}{t}}{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x+1}+\sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}\right|+C.$$

Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{\delta}{\gamma}}\right)dx,$$ где $a,b,c,d-$действительные числа,

$\alpha,\beta,\delta,\gamma-$натуральные числа, сводятся к интегралу от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где $k-$ наименьшее общее кратное знаменателей $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$.

Пример 30.

$$1.\int\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}dx=\begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\frac{(t-1)2tdt}{2t-t^2}=\int\frac{2t\left(t-1\right)dt}{t\left(2-t\right)}=2\int\frac{t-1}{2-t}dt=-2\int\frac{t-1}{t-2}dt=$$

$$=-2\int\frac{t-2+1}{t-2}dt=-2\int\frac{t-2}{t-2}dt-2\int\frac{dt}{t-2}=-2t-2\ln\left|t-2\right|+C=-2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}-2\right|+C.$$

$$2.\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x+2}}=\begin{bmatrix} x+2=t^6 \\ dx=6t^5dt\end{bmatrix}=6\int\frac{t^5dt}{t^2-t^3}=6\int\frac{t^5dt}{t^2\left(1-t\right)}=6\int\frac{t^3dt}{1-t}=-6\int\frac{t^3dt}{t-1}=$$

$$=-6\int\frac{t^3-1+1}{t-1}dt=-6\int\frac{t^3-1}{t-1}dt-6\int\frac{dt}{t-1}=-6\int\frac{(t-1)\cdot\left(t^2+t+1\right)}{t-1}dt-6\ln|t-1|=$$

$$=-6\int\left(t^2+t+1\right)dt-6\ln|t-1|=-6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln|t-1|+C=$$

$$=-2\sqrt{x+2}-3\sqrt[3]{x+2}-6\sqrt[6]{x+2}-6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C.$$

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Приемы вычисления. Основные понятия и свойства

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ так, что $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, т.е. выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1};\ x_i]$ произвольным образом выбрана точка c_i, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$.

Сумма вида

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\ ,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\limits_i \Delta x_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\ .$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка [$[a;\ b]$ и от выбора точек c_i *(теорема существования* определенного интеграла). Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a;\ b]$. Более того, если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;\ b]$ и непрерывна в нем, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$.

2) $\int\limits_a^a f(x)dx=0$.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt$, т.е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.

4) $\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx$.

5) $\int\limits_a^b cf(x)dx=c\int\limits_a^b f(x)dx$.

6) $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,\ a<c<b$.

7) Если $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a;\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$, если $f(x)\leq 0$ для всех точек $x\in[a;\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\leq 0$.

8) Если $f(x)\leq g(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b g(x)dx$.

9) Если M – наибольшее, m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a;\ b]$, то $m(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.

10) $\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)(b-a),\ c\in[a;\ b]$ (теорема о среднем).

11) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\leq\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

12) $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)_x^{'}=f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ является *формулой Ньютона-Лейбница:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

При интегрировании *четных и нечетных функций* в симметричных пределах интегрирования полезно использовать формулу

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ - четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ - нечетная функция.} \end{cases}$$

Пример 31. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл: $\int_{1}^{4} x^2 dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;\ 4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда имеем

$$\int_{1}^{4} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$$

Пример 32. Найти значение интеграла $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx$.

Это также почти «табличный» интеграл. Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона-Лейбница) применим формулу понижения степени:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)dx =$$

$$= \left.\frac{1}{2}x\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left.\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки или замены переменной интегрирования. Пусть для вычисления интеграла $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, причем

$$a = \varphi(\alpha) \text{ и } b = \varphi(\beta),$$

то справедлива формула:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Формула называется *формулой замены переменной интегрирования в определенном интеграле.*

Отметим, что:

1) функцию $x=\varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;

2) новые пределы интегрирования находить из соотношений $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$;

3) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется (в отличие от неопределенного интеграла);

4) вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют и подстановку $t=\psi(x)$.

Пример 33. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

Применим подстановку $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$, $dx=2tdt$. Находим новые пределы интегрирования:

x	1	9
$\sqrt{x}=$	1	3

$$\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}=\int\limits_1^3 \frac{2tdt}{5+2t}=\int\limits_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt=\int\limits_1^3\left(1-\frac{5}{2t+5}\right)dt=t\Big|_1^3-5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3=$$

$$=3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7)=2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

Пример 34. При помощи замены переменной вычислить интеграл

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx.$$

Полагая $t=3-x$, получим: $x=3-t$, $dx=-dt$. Пределы интегрирования

x	2	3
t	1	0

.

Тогда

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx=\int\limits_1^0 (3-t)t^7(-dt)=\int\limits_1^0\left(t^8-3t^7\right)dt=$$

$$=\left(\frac{t^9}{9}-\frac{3}{8}t^8\right)\Bigg|_1^0=-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=\frac{19}{72}.$$

Интегрирование по частям

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\,b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 35. Вычислить интеграл $\int_1^e (x+1)\ln x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \int (x+1)dx = \int x dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$. Имеем

$$\int_1^e (x+1)\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - 0 - \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2 + 5}{4}.$$

5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Несобственные интегралы с бесконечными пределами (или I рода) определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c – произвольное число (обычно c=0).

Несобственные интегралы I рода называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств, если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Вот некоторые *признаки сходимости и расходимости* несобственных интегралов I рода:

1. Если на промежутке $[a;\ +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a;\ +\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимся.*

Пример 36. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

По определению несобственного интеграла I рода имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} \right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1} \right) = 1,$$

интеграл сходится, и его величина равна 1.

Замечание. Можно показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 37. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x dx$

.

По определению несобственного интеграла I рода

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^{0} x\cos x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right] = \lim_{a\to-\infty} \left(x\sin x\Big|_a^0 + \cos x\Big|_a^0 \right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} a\sin a + 1 - \lim_{a\to-\infty} \cos a,$$

интеграл расходится, т.к. $\lim\limits_{a\to-\infty} a\sin a$, $\lim\limits_{a\to-\infty} \cos a$ не существуют.

Пример 38. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, она является четной. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_0^{\infty} f(x)dx.$$

Исходя из определения несобственного интеграла, имеем

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to+\infty}arctgx\Big|_0^a=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл также сходится и равен π.

Пример 39. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Здесь $f(x)=\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}>0$ при $x\in[a;\ +\infty)$, при этом $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}>\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\varphi(x)$. Но интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ расходится, так как $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{b\to\infty}3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^b=3\lim_{b\to\infty}b^{\frac{1}{3}}-3=\infty$.

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ расходится.

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x}{3x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.
5. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos 3x}}{x^2}$.
9. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$.
10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

Вариант 2

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{5x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$.
5. $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{3x+2}$.
9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-ctgx\right)$.
10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

Вариант 4

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^3-x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{tg\,4x}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

7. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{x+5}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-7x-8}{2x^2-x-6}$.

Вариант 5

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$.

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx$.

10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$.

Вариант 6

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^3-12x^2+x}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2ctg\,2x}{\sin 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$.

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x(1-tgx)}{\cos 2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^{3t}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{5x}$.

Вариант 7

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2-5x^3}{2+3x^2+x^4}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^3}{\sqrt{1+3x^2}-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x-7}{4x^2-2x+8}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$.

Вариант 8

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.
5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3+x}\right)^x$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.
8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+9x+8}{x^2+10x+16}$.
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)\times\times\left[\ln(2-3x)-\ln(6-3x)\right]$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 8x}$.

Вариант 9

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^3+3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg\,2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^x$.
5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2}{1-2x^3}+8^{\frac{1}{x}}\right]$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos^{2x}}$.

Вариант 10

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-3x^2+9}{2x^5+2x^2-5}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot ctg\,3x$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{15}{x}\right)^x$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{2x^2+x+20}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{3x+2}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+4}-2}$.

Вариант 11

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^2-4x+3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}{x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2x}{1-2x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$.

Вариант 12

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{6x^3+2x-5}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$.

Вариант 13

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x}{5x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

Вариант 14

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$.

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{15x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x-4}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

Вариант 15

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-7x^2+4}{3x^4+5x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2-4x+20}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{3x^2+7}\right)^{\frac{2}{x^2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{ctgx}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4-\sqrt{4-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{x+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$.

Вариант 16

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{2x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{3x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{x+9}-3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2-5x+2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$.

Вариант 17

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x-2}{x^3-2x^2+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{2x^2-x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

5. $\lim\limits_{x\to +1}(1+x)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x\cos x}{1-\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-tg^2 x\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-$

$-\sqrt{x^2-7x+3})$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin 2x-\sin 2x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x+72}$.

Вариант 18

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^2-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+1}\right)^{5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{2-x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{tg 3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+9x+8}{x^2+10x+9}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{2x}$.

Вариант 19

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{\sin x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{arctg\,3x}$.

Вариант 20

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot ctg^2 3x$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.
4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^3-x}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

Вариант 21

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$.
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-3)\times$
   $\times\left[\ln(3x+4)-\ln 3x\right]$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{6x}-x}{x-6}$.
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+9}-3}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$.

Вариант 22

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-6x^2+2}{x^4-4x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\cos x-\cos^3 x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\sin 5x}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{\frac{x}{3}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{4x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x}{4x}$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

Вариант 23

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{x^6-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-20}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x+4}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{2x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+x^3-2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

Вариант 24

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+8x^2-4}{x^2+4x-5}$.

8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+9x+8}{x^2+10x+16}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-3x-7}{4x^2-2x+8}$.

Вариант 25

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^3+3x^2-4}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3tg^2x\right)^{ctg^2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+3^{-x^2}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4\sin x}}$.

Вариант 26

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x+tg^2x}{x\sin x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+2)-\ln x}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}+2^{-\frac{1}{(x--1)^2}}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{2x^2+7}}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$.

10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2+7x-15}{x^2-4x-2}$.

Вариант 27

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}\right)^{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-$
$-\sqrt{x^2-7x+3})$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-21}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+x^3-2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-6}+2}{x-10}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 5x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}}$.

Вариант 28

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot ctg^2 3x$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^3-x}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

Вариант 29

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-3)\times$
$\times[\ln(3x+4)-\ln 3x]$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{6x}-x}{x-6}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+9}-3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$.

Вариант 30

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-6x^2+2}{x^4-4x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\cos x-\cos^3 x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\sin 5x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{\frac{x}{3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{4x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{4x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

Контрольная работа 2

Вариант 1

Найти производные:

1. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $y=\cos^3\left(2+\frac{1}{x^2+1}\right)$.
3. $y=\left(x^2+4\right)^2 tgx$.
4. $y=\left(10^{x+1}+9x^2\right)^3$.
5. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.
6. $y=x^{\cos x}$.
7. $x^3+y^3-3axy=0$.
8. $x+y+\sin y=0$.
9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln t. \end{cases}$
10. Найти y'', если $y=xe^{-x^2}$.

Вариант 2

Найти производные:

1. $y=\cos(\ln x)\cdot\sin(\ln x)$.
2. $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
3. $y=e^{-x}\ln 10x^2+2x$
4. $y=tg^3x^2$.
5. $y=4\ln\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x}\right)$.
6. $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$.
7. $e^{xy}-e^x-e^y=0$.
8. $x^2+2y\cos y=\sin y$.
9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x=tg\,2t, \\ y=\ln\left(t^2+1\right). \end{cases}$
10. Найти y'', если $y=\sin^2 x$.

Вариант 3

Найти производные:

1. $y=\frac{1}{2}\ln tg\left(\sqrt{ax}-\frac{x}{2}\right)$.
2. $y=\cos^3 4x+\arcsin\left(x\cdot 8^{x^2}\right)$.
3. $y=(\sin x)^{x\sqrt{1-x^2}}$.
4. $y=arctg^2\frac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}+e^{\sqrt{1+4x}}$.
5. $y=\sqrt[12]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.
6. $y=\frac{tg^2x}{2}+\ln\cos x$.
7. $arctg(x+y)-y^3=0$.
8. $\sin(x-y)=\cos(x+y)$.
9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$
10. Найти y''', если $y=\arcsin\sqrt{x}$.

Вариант 4

Найти производные:

1. $y=x^3 arctgx^3$.
2. $y=3^{4x^2}\ln\sqrt[5]{x^3}$.
3. $y=\ln\sqrt{x\cdot\sin x}$.
4. $y=\arcsin\sqrt[4]{1-x^2}$.
5. $y=\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^5$.
6. $y=x^{\sqrt{x+1}}$.
7. $\ln y=arctg\frac{x}{y}$.
8. $tgy=\sin(x+y)+xy^2$.
9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x=t^3+3, \\ y=t^2-2t. \end{cases}$
10. Найти y'', если $y=ctgx$.

Вариант 5

Найти производные:

1. $y=\cos^6\left(x+3^{-x}\right)+\sqrt{x^3-4}$.
2. $y=tg\sqrt[3]{x-ctg^2 8x}+\arcsin e^{5x}$.
3. $y=\ln^2\sin\dfrac{1}{x}\cdot\arccos 3x$.
4. $y=\left(arcctg\,2x\right)^{\frac{x-2}{x}}$.
5. $y=\ln^3(4x+1)-e^{3x}$.
6. $y=e^x\cdot\sqrt{1-e^{2x}}$.
7. $arctg\,\dfrac{x}{y}-\sqrt{2xy}-y=0$.
8. $y^2x-\sin y=2x^2$.
9. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right),\\ y=\dfrac{1}{1+t^2}.\end{cases}$

10.Найти y'', если $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$.

Вариант 6

Найти производные:

1. $y=\sqrt{\cos 2x}\cdot 2^{\sqrt{\sin x}}$.
2. $y=tg\,\dfrac{x}{5}\cdot tg\,\dfrac{\pi}{8}$.
3. $y=(\cos x)^{x^3}$.
4. $y=\ln arctg\,\dfrac{1}{1+x}$.
5. $x^2y+y^3=3x^5-\sin y$.
6. $y\cdot\sin x=\cos(x-y)$.
7. $y=\ln^3(4x+1)-e^{3x}$.
8. $y=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

9.Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right),\\ y=\dfrac{1}{1+t^2}.\end{cases}$

10.Найти y'', если $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$.

Вариант 7

Найти производные:

1. 1. $y=2^{\arcsin\left(x\sqrt{1-x^2}\right)}+\left(x^2-3\right)^4$.
2. 2. $y=tg^5\,\dfrac{x}{1+3x^2}$.
3. 3. $y=(\ln x+1)^{\arccos\sqrt{x}}$.
4. 4. $y=\left(\sin^3 2x\right)\cdot arctge^{-x}+\sqrt[3]{\cos(1-x)}$.
5. 5. $y=x^3\sqrt{2x-1}$.
6. 6. $y=\dfrac{1}{2}ctg^2x+\ln\sin x$.
7. 7. $y\sin x=\cos(x-y)$.
8. 8. $ctgy+x^2-arcctg\,\dfrac{y}{x}=2$.
9. 9. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=e^t\cdot\sin t,\\ y=\cos t.\end{cases}$
10. 10. Найти y'', если $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Вариант 8

Найти производные:

1. 1. $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. 2. $y=\sin^5 e^{4x}+ctg\sqrt[3]{4-3x}$.
3. 3. $y=(\cos 2x)^{tg^2x}$.
4. 4. $y=3^{ctgx}+\arcsin\dfrac{x}{x^2+1}$.
5. 5. $y=x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$.
6. 6. $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+2\cos^2 x}$.
7. 7. $y^2-arctgxy+x^2+1=0$.
8. 8. $tg\,\dfrac{y}{x}=5x^2y$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = \cos\frac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

10.10. Найти y'', если $y = xarctgx$.

Вариант 9

Найти производные:

1. 1. $y = \sqrt{x^3 + x^2 + x} + \ln\sqrt{x}$.
2. 2. $y = \cos^3(\cos x)$.
3. 3. $y = \dfrac{tg^4(arctgx)}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. 4. $y = \ln(\sin^2 x + 6)$.
5. 5. $y = \frac{1}{3}tg^2x - tgx + x$.
6. 6. $y = x^{tg^2 x}$.
7. 7. $e^x - e^y = y - x$.
8. 8. $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

10.10. Найти y''', если $y = arctgx$.

Вариант 10

Найти производные:

1. 1. $y = x\sin\left(\ln^2 x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2. 2. $y = \sqrt{2}arcctg\frac{tg2x}{\sqrt{2}} - (x^2+4)^7$.
3. 3. $y = e^{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt[3]{2x-1}$.
4. 4. $y = \left(\dfrac{x}{ctg3x}\right)^{x^2+4x}$.
5. 5. $y = \ln\cos x - \sin(\ln x)$.
6. 6. $y = \arcsin e^{2x} + \sqrt[3]{x}$.
7. 7. $x - y^2 + a\sin y = 0$.
8. 8. $e^x \cdot e^y - ye^x = 0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$

10.10. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $y = e^{-x}\cdot\sin x$.

Вариант 11

Найти производные:

1. 1. $y = \frac{1}{2}m\ln(x^2 - a^2) + \frac{1}{4}\ln\frac{x-a}{x+a}$.
2. 2. $y = (\sin x)^{\ln x}$.
3. 3. $y = \sqrt{\cos 2x}\cdot 2^{\sqrt{\sin x}}$.
4. 4. $y = arctg(tg^2 x)$.
5. 5. $y = \left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)^4$.
6. 6. $y = arctg\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$.
7. 7. $x^2 - y^3\cos x = \sin^2 y$.
8. 8. $x - y + e^y\sin y = 0$.
9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = tgt + ctgt, \\ y = 2\ln ctgt. \end{cases}$

10.10. Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$, если $y = xe^{-x^2}$.

Вариант 12

Найти производные:

1. 1. $y = \frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x - \cos^2 3x)$.
2. 2. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.
3. 3. $y = ctg(4x-1) + arctg\sqrt{4x + tg2x}$.
4. 4. $y = (x^2+1)^{5x+2}$.
5. 5. $y = \frac{1}{3}tg^2x - tgx + x$.
6. 6. $y = \sqrt{\cos 2x}\cdot 2^{\sqrt{\sin x}}$.
7. 7. $\ln y = \arcsin\frac{x}{y}$.

8. 8. $x\sin y - y\cos x = 0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = t^3 + 7t, \\ y = t^5 + 5t. \end{cases}$

10. 10. Найти y'', если $y = \sin^3 5x$.

Вариант 13

Найти производные:

1. 1. $y = \sqrt[3]{2+\cos x}$.
2. 2. $y = ctg^2 \frac{x}{2} + \sin^3 \frac{x}{2}$.
3. 3. $y = \ln(\cos(\arcsin x))$.
4. 4. $y = \frac{arctgx}{1+x^2}$.
5. 5. $y = \ln 5x^3 + 7^{x^3}$.
6. 6. $y = (\ln x)^{\ln x}$.
7. 7. $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{arctg\frac{y}{x}}$.
8. 8. $y^2 + 2\ln y = x^4$.
9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = t^3 + 3t, \\ y = \ln(t+3). \end{cases}$
10. 10. Найти y'', если $y = \sqrt{x^2+1}$.

Вариант 14

Найти производные:

1. 1. $y = \sin^n x \cdot \cos(nx)$.
2. 2. $y = \ln(\ln(\ln x))$.
3. 3. $y = \frac{tg^5 7x - arctg^2 4x}{\arccos^2 x^2}$.
4. 4. $y = (2x^3+1)^{1+\frac{1}{x}}$.
5. 5. $y = \sqrt{1-3x} \cdot \arcsin\frac{x}{2}$.
6. 6. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.
7. 7. $y = \sin(x+2y)$.
8. 8. $\ln y = \arcsin\frac{x}{y}$.
9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \arcsin 2t. \end{cases}$
10. 10. Найти y'', если $y = x^5 \ln x$.

Вариант 15

Найти производные:

1. 1. $y = 5x^2 \cdot 2^{5x}$.
2. 2. $y = \sqrt{x^5 + \frac{1}{x^7}}$.
3. 3. $y = \frac{5}{2}\sqrt{\sin^5 x} \cdot e^{2x}$.
4. 4. $y = tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. 5. $y = (x+\sin x)^3$.
6. 6. $y = (tgx)^{tgx}$.
7. 7. $y = 3\sin^2 y + x^3$.
8. 8. $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.
9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}. \end{cases}$
10. 10. Найти y''', если $y = \sin^2 x$.

Вариант 16

Найти производные:

1. 1. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.
2. 2. $y = \frac{4\ln x}{1-\ln x}$.
3. 3. $y = arctg\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$.
4. 4. $y = (\cos x + 1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

5. 5. $y=\sin^6 5x\cdot\cos^2\frac{x}{3}$.

6. 6. $y=\frac{5}{2}\sqrt{\sin^5 x}\cdot e^{2x}$.

7. 7. $x+y+e^y arctgx=0$.

8. 8. $2x-y+\cos y-1=0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=\frac{t^3}{3}-t,\\ y=2(t-\sin t).\end{cases}$

10. 10. Найти y'', если $y=x^3e^{x^2}$.

Вариант 17

Найти производные:

1. 1. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin 3x}}$.

2. 2. $y=x\arcsin^2\left(10^{x^2}\right)$.

3. 3. $y=\sqrt{\frac{1}{x}+\arcsin\sqrt{x}}-tg^3\frac{5+x^2}{x}$.

4. 4. $y=(2+x)^{x^2}$.

5. 5. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. 6. $y=\ln\frac{2+tgx}{2-tgx}$.

7. 7. $te^{-\frac{s}{2}}+se^{-\frac{t}{2}}=2$.

8. 8. $y=ctg(x+y)$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t).\end{cases}$

10. 10. Найти y''', если $y=x\cdot arctgx$.

Вариант 18

Найти производные:

1. 1. $y=\frac{e^x\cos x}{\sin^2 x}$.

2. 2. $y=\ln\left(\arcsin\frac{e^{2\sin x}}{3}\right)$.

3. 3. $y=\left(x^2+a^2\right)arctg\frac{x}{a}-\sqrt{ax}$.

4. 4. $y=(\sin x)^x$.

5. 5. $y=\sqrt{\arccos\sqrt[5]{x}}$.

6. 6. $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. 7. $xtg\,\pi y-x\ln y=1$.

8. 8. $e^{x-2}+yx-3y-2=0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=\cos t+a\sin t,\\ y=\sin t-a\cos t.\end{cases}$

10. 10. Найти y'', если $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

Вариант 19

Найти производные:

1. 1. $y=tg\sqrt[3]{1+\cos\sqrt{x}}$.

2. 2. $y=2^{x^2}\ln\cos 2x$.

3. 3. $y=\frac{x+1}{\sqrt{\sin^3 x}}$.

4. 4. $y=\frac{\arccos x}{1-x^2}+tg\sqrt{2x}$.

5. 5. $y=2\left(\sin 4x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

6. 6. $y=(\cos x)^{\sin 2x}$.

7. 7. $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

8. 8. $xy+\arcsin(x+y)=0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=\sin 2t.\end{cases}$

10. 10. Найти y'', если $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Вариант 20

Найти производные:

1. 1. $y=\ln^4\left(\cos x+tg\sqrt[3]{2x}\right)$.

2. 2. $y=\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2^{\ln x}}$.

3. 3. $y=\frac{5}{2}\sqrt{tg^5(x)}+\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$.

4. 4. $y=x^3e^{3x}+\sin^2 x$.

5. 5. $y=2{,}5x^4\cdot 10^{x+1}$.

6. 6. $y=(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

7. 7. $xy^2=tg^2(x+y)$.

8. 8. $\ln y=\sin 2x\ln\cos x$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если

$$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(t+1). \end{cases}$$

10. 10. Найти y'', если $y=\arcsin x$.

Вариант 21

Найти производные:

1. 1. $y=tg(\sin^2 2x)\cdot ctg(\cos^2 2x)$.

2. 2. $y=x^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})^x$.

3. 3. $y=x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x)$.

4. 4. $y=\arcsin e^{-x}+\arccos\sqrt{1-e^{2x}}$.

5. 5. $y=2^{x^2}\ln\cos 2x$.

6. 6. $y=\ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$.

7. 7. $ye^y=e^{x+1}$.

8. 8. $e^y\cos x=e^{-x}\sin y$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\frac{\ln t}{t}. \end{cases}$

10. 10. Найти y''', если $y=arctg 2x$.

Вариант 22

Найти производные:

1. 1. $y=\frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{\arcsin x}$.

2. 2. $y=\sqrt[5]{x+\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}}$.

3. 3. $y=\frac{1}{4}tg^4 t-\frac{1}{2}ctg 2t-\ln(\cos t)$.

4. 4. $y=(x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

5. 5. $y=x-\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

6. 6. $y=\ln^3(2x+1)$.

7. 7. $(x+y)^3=27(x+y)$.

8. 8. $x-y+arctgy=0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если

$$\begin{cases} x=a\left(\ln tg\frac{t}{2}+\cos t-\sin t\right), \\ y=a(\sin t+\cos t). \end{cases}$$

10. 10. Найти y'', если $y=\sin^6 2x$.

Вариант 23

Найти производные:

1. 1. $y=ctg\frac{x\ln x-1}{x\ln+1}$.

2. 2. $y=\cos 4x-e^{\sin^2 x}tg^2 3x$.

3. 3. $y=(x+1)arctge^{-2x}$.

4. 4. $y=(2x^2+3x+4)^{3x}$.

5. 5. $y=\arcsin e^{2x}+\sqrt[3]{x}$.

6. 6. $y=\ln\frac{x^5}{x^5+5}$.

7. 7. $y^2-x=\ln\frac{y}{x}$.

8. 8. $x-y+arctgy=0$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если

$$\begin{cases} x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$$

10. 10. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $y=\ln(\sin x-\cos x)$.

Вариант 24

Найти производные:

1. 1. $y=\ln\frac{(x-1)^3(x-3)^5}{(x-2)^5(x-4)^2}$.

2. 2. $y=\arcsin(\cos 3x)+\cos^2(ctg 7x)$.

3. 3. $y=\frac{(1-x)^2}{(1+x)^3}+e^{-x^2+1}$.

4. 4. $y=x^{tg\frac{x}{2}}$.

5. 5. $y=ctg^2\frac{x}{2}+\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$.

6. 6. $y=\ln tg\frac{x}{2}$.

7. 7. $xy^3+y^4=2xy$.

8. 8. $y^2+2\ln y=x^4$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=t^3+3t,\\ y=\ln(t+3).\end{cases}$

10. 10. Найти y'', если $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

Вариант 25

Найти производные:

1. 1. $y=\ln tg\frac{2x+1}{4}$.

2. 2. $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}$.

3. 3. $y=e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x^2-1}\right)$.

4. 4. $y=(\cos 3x)^{\frac{1}{x}}$.

5. 5. $y=tg\frac{1-\cos 4x}{\sqrt[3]{x}}$.

6. 6. $y=\sin^5\sqrt{x^2+\sqrt{x}}$.

7. 7. $arctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

8. 8. $x^2-xy+y^2=1$.

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=\frac{1}{t+1},\\ y=\frac{1}{(t+1)^2}.\end{cases}$

10.10. Найти y'', если $y=\sqrt[3]{x^3+2}$.

Вариант 26

Найти производные:

1. 1. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

2. 2. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$.

3. 3. $y=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$.

4. 4. $y=\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

5. 5. $y=\left(x^2+4x\right)^{2x}$.

6. 6. $y=\sin x\cdot tgx$.

7. 7. $x+y+e^y tgx=0$.

8. 8. $e^x e^y-ye^{x^2}=0$

9. 9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=t-\ln t,\\ y=t+\ln\cos t.\end{cases}$

10.10. Найти y''', если $y=arctgx$.

Вариант 27

Найти производные:

11.1. $y=\frac{1}{2}m\ln\left(x^2-a^2\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{x-a}{x+a}$.

12.2. $y=(\sin x)^{\ln x}$.

13.3. $y=\sqrt{\cos 2x}\cdot 2^{\sqrt{\sin x}}$.

14.4. $y=arctg\left(tg^2x\right)$.

15.5. $y=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)^4$.

16.6. $y=arctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$.

17.7. $x^2-y^3\cos x=\sin^2 y$.

18.8. $x-y+e^y\sin y=0$.

19.9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=tgt+ctgt,\\ y=2\ln ctgt.\end{cases}$

20.10. Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$, если $y=xe^{-x^2}$.

Вариант 28

Найти производные:

21.1. $y=\frac{1}{10}e^{-x}\left(3\sin 3x-\cos^2 3x\right)$.

22.2. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

23.3. $y=ctg\left(4x-1\right)+arctg\sqrt{4x+tg2x}$.

24.4. $y=\left(x^2+1\right)^{5x+2}$.

25.5. $y=\frac{1}{3}tg^2x-tgx+x$.

26.6. $y=\sqrt{\cos 2x}\cdot 2^{\sqrt{\sin x}}$.

27.7. $\ln y=\arcsin\frac{x}{y}$.

28.8. $x\sin y-y\cos x=0$.

29.9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=t^3+7t,\\ y=t^5+5t.\end{cases}$

30.10. Найти y'', если $y=\sin^3 5x$.

Вариант 29

Найти производные:

31.1. $y=\sqrt[3]{2+\cos x}$.

32.2. $y=ctg^2\frac{x}{2}+\sin^3\frac{x}{2}$.

33.3. $y=\ln(\cos(\arcsin x))$.

34.4. $y=\frac{arctgx}{1+x^2}$.

35.5. $y=\ln 5x^3+7^{x^3}$.

36.6. $y=(\ln x)^{\ln x}$.

37.7. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{arctg\frac{y}{x}}$.

38.8. $y^2+2\ln y=x^4$.

39.9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=t^3+3t,\\ y=\ln(t+3).\end{cases}$

40.10. Найти y'', если $y=\sqrt{x^2+1}$.

Вариант 30

Найти производные:

41.1. $y=\sin^n x\cdot\cos(nx)$.

42.2. $y=\ln(\ln(\ln x))$.

43.3. $y=\frac{tg^5 7x-arctg^2 4x}{\arccos^2 x^2}$.

44.4. $y=\left(2x^3+1\right)^{1+\frac{1}{x}}$.

45.5. $y=\sqrt{1-3x}\cdot\arcsin\frac{x}{2}$.

46.6. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

47.7. $y=\sin(x+2y)$.

48.8. $\ln y=\arcsin\frac{x}{y}$.

49.9. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=\arcsin 2t.\end{cases}$

50.10. Найти y'', если $y=x^5\ln x$.

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. $\int\sin 2xdx$;
2. $\int\frac{x^2+3x}{2x^4}dx$;
3. $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$;
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;
5. $\int x\sqrt{x-1}dx$;
6. $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$;
7. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;
8. $\int\sqrt{2+x^2}dx$;
9. $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$;

10. $\int x \sin 2x dx$.

Вариант 2

1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;
2. $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$;
3. $\int (3x-4)^5 dx$;
4. $\int \frac{x^2+1}{3x} dx$;
5. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$;
6. $\int xe^{-x} dx$;
7. $\int \frac{dx}{x^2+10x+29} dx$;
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;
9. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx$;
10. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$.

Вариант 3

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$;
2. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$;
3. $\int \sqrt{4-x^2}dx$;
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;
5. $\int \sin^4 xdx$;
6. $\int (4x+5\sin x)dx$;
7. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}dx$;
8. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$;
9. $\int e^x \cos xdx$;
10. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

Вариант 4

1. $\int (2x^4-3x^3+2x-1)dx$;
2. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;
3. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$;
4. $\int x\ln xdx$;
5. $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx$;
6. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$;
7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;
8. $\int \sqrt{1+x}dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Вариант 5

1. $\int \frac{xdx}{(x-1)^3}$;
2. $\int (x-\sin x)dx$;
3. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$;
4. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$;
5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$;
6. $\int (x-5)^3dx$;
7. $\int \frac{dx}{x^2+8x+1}$;
8. $\int x^2e^{3x}dx$;
9. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+\cos x}$;
10. $\int x\sqrt{x^2-2}dx$.

Вариант 6

1. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;
2. $\int \sin 8x\cos 2xdx$;
3. $\int e^{5x}dx$;
4. $\int \frac{2x^2-5x-13}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$;
5. $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;
6. $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+10}dx$;
7. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$;
8. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}$;
10. $\int x^2\arcsin xdx$.

Вариант 7

1. $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$;
3. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$;
4. $\int \cos 2x dx$;
5. $\int \frac{x^3+2x^2+4}{x^2+x+1}dx$;
6. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;
7. $\int \frac{5dx}{x\sqrt{x}}$;
8. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx$;
9. $\int (x^5-3x^2)dx$;
10. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx$.

Вариант 8

1. $\int x\cdot 5^x dx$;
2. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$;
3. $\int xe^{x^2}dx$;
4. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$;
5. $\int \sin^4 x\cdot \cos^5 x dx$;
6. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$;
7. $\int x\sqrt{9-x^2}dx$;
8. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;
10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$.

Вариант 9

1. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;
2. $\int \sqrt{1-x^2}dx$;
3. $\int \frac{\ln x}{x}dx$;
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$;
5. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx$;
6. $\int x(5x^2-3)^7 dx$;
7. $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2-5x+6}$;
8. $\int (2x+1)e^{3x}dx$;
9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$;
10. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Вариант 10

1. $\int \frac{2+\sin x}{2-\cos x}dx$;
2. $\int \sqrt{2+x^2}dx$;
3. $\int \sin 2x dx$;
4. $\int x\sqrt{x-1}dx$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;
6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$;
7. $\int \frac{x^2+3x-2}{2x^4}dx$;
8. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;
9. $\int x^2\cos 2x dx$;
10. $\int \frac{xdx}{x^2+x+2}$.

Вариант 11

1. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$;
2. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;
3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;
4. $\int (3x-4)^5 dx$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;
6. $\int xe^{-x}dx$;
7. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$;
8. $\int \frac{x^2+1}{3x^2}dx$;
9. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$;
10. $\int x\sqrt{4-x^2}dx$.

Вариант 12

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$;
2. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$;
3. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$;
4. $\int e^x \sin x dx$;
5. $\int \sqrt{4-x^2}dx$;
6. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$;
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;
8. $\int \sin^4 x dx$;
9. $\int (4x+5\cdot\cos x)dx$;
10. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}$.

Вариант 13

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;
2. $\int \left(2x^5+4x^2-3\right)dx$;
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;
4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;
5. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$;
6. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$;
7. $\int \frac{dx}{2\cos x+3}$;
8. $\int \sqrt{x}\ln x dx$;
9. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$;
10. $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx$.

Вариант 14

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$;
2. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$;
3. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$;
4. $\int \left(x^2+2\cos x\right)dx$;
5. $\int \frac{xdx}{(x-1)^3}$;
6. $\int (x-5)^3 dx$;
7. $\int x\sqrt{x^2-2}dx$;
8. $\int \frac{dx}{x^2+8x+1}$;
9. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+\cos x}$;
10. $\int x^2e^{2x}dx$.

Вариант 15

1. $\int x^2 arctgx dx$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$;
3. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$;
4. $\int \frac{\cos x dx}{\cos x - 3}$;
5. $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+10}dx$;
6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;
7. $\int \cos 5x \cdot \sin 3x dx$;
8. $\int e^{3x}dx$;
9. $\int \frac{2x^2-5x-13}{(x+3)(x-2)(x+1)}dx$;
10. $\int \frac{\sin^3 x+2}{\sin^2 x}dx$.

Вариант 16

1. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-5}$;
2. $\int (x^4-2x^3+2x-7)dx$;
3. $\int \cos 2x \cdot \sin 3x dx$;
4. $\int 7x \cdot \sqrt{x} dx$;
5. $\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x}$;
6. $\int \frac{x^3+2x^2+4}{x^2+x+1}dx$;
7. $\int \sin 3x dx$;
8. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$;
10. $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$.

Вариант 17

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;
3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$;
4. $\int \sqrt{16-x^2}dx$;
5. $\int \frac{(x^2+2)^2}{x}dx$;
6. $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$;
7. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx$;
8. $\int x e^{-x^2}dx$;
9. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$;
10. $\int x^2 \sin x dx$.

Вариант 18

1. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;
2. $\int \sqrt{x^2-4}dx$;
3. $\int \frac{\ln x}{x}dx$;
4. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx$;
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$;
6. $\int x(5x^2-3)^5 dx$;
7. $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2-5x+6}$;
8. $\int (4x-3)e^{2x}dx$;
9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$;
10. $\int x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}+x\right)dx$.

Вариант 19

1. $\int\sqrt{4-x^2}dx$;
2. $\int\cos 5x dx$;
3. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x+3)(x-1)}dx$;
4. $\int\frac{x^3+3x}{x^5}dx$;
5. $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$;
6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;
7. $\int x\sqrt{x-1}dx$;
8. $\int\frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx$;
9. $\int\frac{(x-1)dx}{2x^2+2x+5}$;
10. $\int x^2\ln x dx$.

Вариант 20

1. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;
2. $\int x\sqrt{x^2-16}dx$;
3. $\int(2x+1)^{12}dx$;
4. $\int\frac{x^2-x+3}{x^4}dx$;
5. $\int\cos^3 x\cdot\sin^4 x dx$;
6. $\int x^2e^x dx$;
7. $\int\frac{dx}{x^2+2x+10}$;
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;
9. $\int\frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$;
10. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

Вариант 21

1. $\int\left(5\cos x+\frac{1}{x}\right)dx$;
2. $\int\frac{3tg^2x+4}{\sin^2 x}dx$;
3. $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx$;
4. $\int\frac{dx}{2-3x}$;
5. $\int\sin^2 x\cdot\cos x dx$;
6. $\int\frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
7. $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$;
8. $\int x\ln x dx$;
9. $\int e^{\sqrt{x}}dx$;
10. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

Вариант 22

1. $\int\left(x^4+\sqrt[5]{x}+\frac{1}{x}\right)dx$;
2. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$;
3. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;
4. $\int\sin(3x+5)dx$;
5. $\int\frac{x^4}{x^5+7}dx$;
6. $\int\frac{3^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;
8. $\int xe^{2x}dx$;
9. $\int(x^3+1)\cos x dx$;
10. $\int\frac{x^3+1}{x^2+3x-6}dx$.

Вариант 23

1. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

2. $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$;

3. $\int e^{-x^2}xdx$;

4. $\int\sqrt{2x-5}dx$;

5. $\int\frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$;

6. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

8. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$;

9. $\int\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

10. $\int\frac{7x-6}{2x^2-6x+4}dx$.

Вариант 24

1. $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$;

2. $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;

3. $\int\frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$;

4. $\int\frac{dx}{5x+2}$;

5. $\int\cos^3 x\cdot\sin xdx$;

6. $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

7. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$;

8. $\int xarctgxdx$;

9. $\int x^2\sin xdx$;

10. $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}dx$.

Вариант 25

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;

2. $\int\sin^4 xdx$;

3. $\int(4x+5\sin x)dx$;

4. $\int\frac{xdx}{x^2-7x+13}$;

5. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$;

6. $\int(x-5)^3dx$;

7. $\int x^2arctgxdx$;

8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$;

9. $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

10. $\int\frac{\cos xdx}{\cos x-3}$.

Вариант 26

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;

2. $\int x\sqrt{x-1}dx$;

3. $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$;

4. $\int\frac{dx}{x^2+10x+29}dx$;

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

6. $\int\frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$;

7. $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

8. $\int x\ln xdx$;

9. $\int\sqrt{1-2x-x^2}dx$;

10. $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Вариант 27

1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;

2. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$;

4. $\int \frac{dx}{3\sin x+2\cos x}$;

5. $\int \frac{x^3+2x^2+4}{x^2+x+1}dx$;

6. $\int \sin 3x dx$;

7. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$;

8. $\int \sqrt{1+x}dx$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Вариант 28

1. $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

2. $\int \frac{3x-2}{x^2-6x+10}\,dx$;

3. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$;

4. $\int \frac{5dx}{x\sqrt{x}}$;

5. $\int \sin 3x\cdot\sin 5x dx$;

6. $\int \left(x^5-3x^2\right)dx$;

7. $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2-5x+6}$;

8. $\int (4x-3)e^{2x}dx$;

9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$;

10. $\int x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}+x\right)dx$.

Вариант 29

1. $\int \left(5\cos x+\frac{1}{x}\right)dx$;

2. $\int \frac{3tg^2 x+4}{\sin^2 x}dx$;

3. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$;

5. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx$;

6. $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;

8. $\int \sin^4 x dx$;

9. $\int (4x+5\cdot\cos x)dx$;

10. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Вариант 30

1. $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}dx$;

2. $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$;

3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$;

4. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

5. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$;

6. $\int \frac{dx}{5x+2}$;

7. $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$;

8. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

10. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$.

Крюкова Татьяна Владимировна

МАТЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельной работы студентов
специальности «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»
очной формы обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 15.12.15. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 4,69. Тираж 10 экз. Зак. 151539. Рег. № 169.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.